

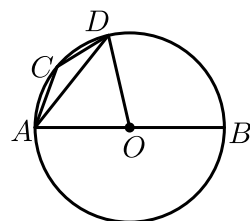
第2讲圆综合之线段专项训练

一、圆与勾股定理

典题精练1

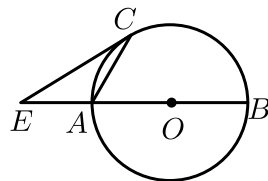
1. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上．

(1) 如图①，点 D 在 $\odot O$ 上，且 $AC = CD$ ，若 $\angle CDA = 20^\circ$ ，求 $\angle BOD$ 的大小．



图①

(2) 如图②，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，交 BA 的延长线于点 E ，若 $\odot O$ 的直径为 $2\sqrt{3}$ ， $AC = \sqrt{3}$ ，求 EA 的长．

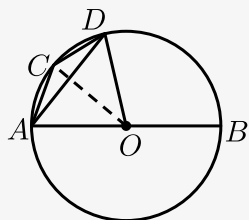


图②

【答案】(1) 100° .

(2) $\sqrt{3}$.

【解析】(1) 连接 OC ，



$$\because AC = CD,$$

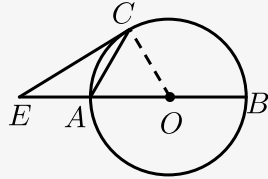
$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COD,$$

$$\text{在}\odot O\text{中}, \angle AOC = 2\angle CDA = 40^\circ,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle COD &= \angle AOC = 40^\circ, \\
 \therefore \angle BOD &= 180^\circ - \angle AOC - \angle COD, \\
 &= 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ \\
 &= 100^\circ.
 \end{aligned}$$

(2) 连接 OC ,



$$\begin{aligned}
 \because \odot O \text{ 的直径为 } 2\sqrt{3}, \\
 \therefore OA = OC = \sqrt{3}, \\
 \because AC = \sqrt{3}, \\
 \therefore OA = OC = AC, \\
 \therefore \triangle AOC \text{ 是等边三角形}, \\
 \therefore \angle AOC = 60^\circ, \\
 \because CE \text{ 切 } \odot O \text{ 于点 } C, \\
 \therefore \angle ECO = 90^\circ, \\
 \text{在 Rt}\triangle ECO \text{ 中}, \\
 \angle E = 90^\circ - \angle AOC \\
 &= 90^\circ - 60^\circ \\
 &= 30^\circ. \\
 \therefore EO &= 2OC = 2\sqrt{3} \\
 EA &= EO - OA \\
 &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \\
 &= \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

2. 如图1, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于 G , 过 C 点的切线与射线 DO 相交于点 E , 直线 DB 与 CE 交于点 H , $OG = BG$, $BH = 1$.

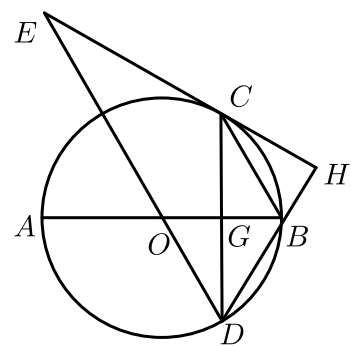


图1

(1) 求 $\odot O$ 的半径 .

(2) 将射线 DO 绕 D 点逆时针旋转 , 得射线 DM (如图2) , DM 与 AB 交于点 M , 与 $\odot O$ 及切线 CF 分别相交于点 N , F , 当 $GM = GD$ 时 , 求切线 CF 的长 .

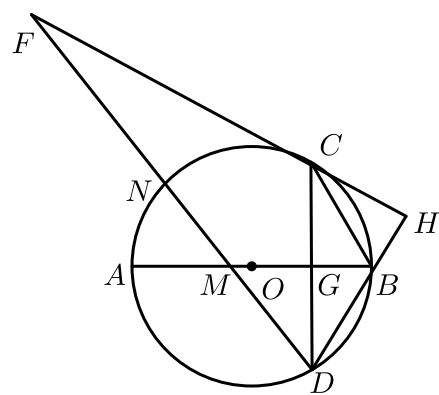


图2

【答案】 (1) 2 .

(2) $6 + 2\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 如图3 , 连接 OC ,

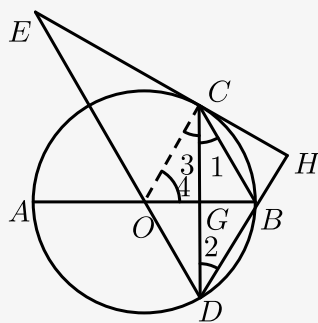


图3

$\because CE$ 为 $\odot O$ 切线 ,

$\therefore OC \perp CE$,

$\because CD \perp AB$,

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because OG = BG \text{ 且 } OB \perp CD,$$

$$\therefore OC = BC,$$

$$\text{又} \because OC = OB,$$

$$\therefore \triangle OBC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle BCH = 30^\circ, \angle 4 = 60^\circ,$$

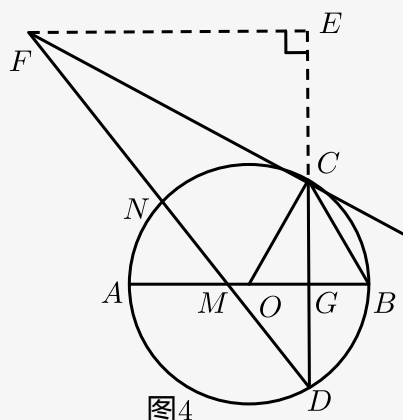
$$\therefore \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = 1,$$

$$\therefore OC = BC = 2BH = 2,$$

即半径为2.

(2) 如图4, 过点F作 $FE \perp DC$, 交 DC 延长线于点E.



$$\therefore \angle CFE + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\because OC \perp FC,$$

$$\therefore \angle OCG + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle OCG,$$

$$\therefore \tan \angle CFB = \tan \angle OCG, \text{ 即 } \frac{CE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } EF = \sqrt{3}x,$$

$$\because GM = GD, MG \perp CD,$$

$$\therefore \angle MDG = 45^\circ,$$

$$\because FE \perp ED,$$

$$\therefore \angle DFE = 90^\circ - \angle MDC = 45^\circ = \angle MDG.$$

$$\therefore EF = ED = EC + CD,$$

$$\text{又} \because CD = 2CG = 2 \times \sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{3}x = x + 2\sqrt{3},$$

$$\text{解得 } x = 3 + \sqrt{3},$$

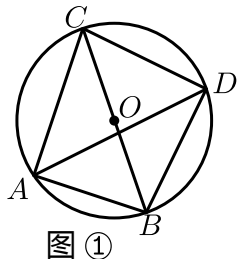
$$\therefore FC = 2EC = 6 + 2\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

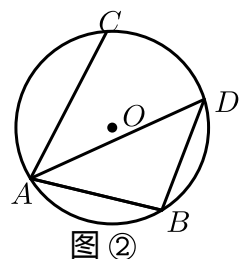
经典再现

3. 已知 $\odot O$ 的直径为10, 点A、点B、点C在 $\odot O$ 上, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点D.

(1) 如图①, 若BC为 $\odot O$ 的直径, $AB = 6$, 求AC、BD、CD的长.



(2) 如图②, 若 $\angle CAB = 60^\circ$, 求BD的长.



【答案】(1) $AC = 8$, $BD = CD = 5\sqrt{2}$.

(2) $BD = 5$.

【解析】(1) 如图①, $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle CAB = \angle BDC = 90^\circ.$$

$$\because \text{在Rt}\triangle CAB \text{中}, BC = 10, AB = 6,$$

$\therefore$ 由勾股定理得到:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 8.$$

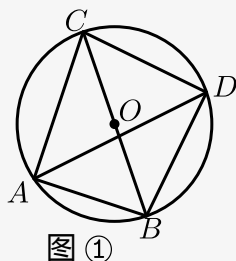
$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$$\therefore CD = BD.$$

$$\text{在Rt}\triangle BDC \text{中}, BC = 10, CD^2 + BD^2 = BC^2,$$

$$\therefore \text{易求 } BD = CD = 5\sqrt{2}.$$

(2) 如图②, 连接OB, OD.



图①

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, 且
 $\angle CAB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = 30^\circ$,
 $\therefore \angle DOB = 2\angle DAB = 60^\circ$.
 又 $\because OB = OD$,
 $\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形 ,
 $\therefore BD = OB = OD$.
 $\because \odot O$ 的直径为 10 , 则 $OB = 5$,
 $\therefore BD = 5$.

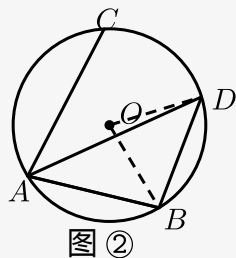
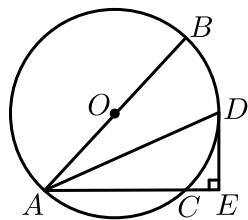


图 ②

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

典题精练2

4. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 $\odot O$ 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 E .

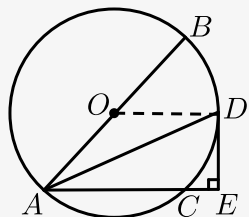


- (1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线 .
 (2) 如果 $\angle BAC = 60^\circ$, $AE = 4\sqrt{3}$, 求 AC 长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 连接 OD ,



$\because OD = OA$,
 $\therefore \angle OAD = \angle ODA$,
 $\because AD$ 平分 $\angle BAE$,
 $\therefore \angle BAD = \angle EAD$,

$$\therefore \angle ODA = \angle EAD,$$

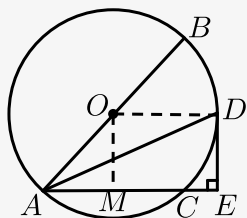
$$\therefore OD \parallel AE,$$

$$\therefore DE \perp AC,$$

$$\therefore OD \perp DE,$$

$\therefore OE$ 是 $\odot O$ 切线.

(2) 作 $OM \perp AC$ 于 M ,



$$\therefore AM = MC,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = AE \cdot \tan 30^\circ = 4,$$

由题意知, 四边形 $OMED$ 为矩形,

$$\therefore OM = DE = 4,$$

$$\therefore AM = \frac{OM}{\tan 60^\circ} = \frac{4}{3} \sqrt{3},$$

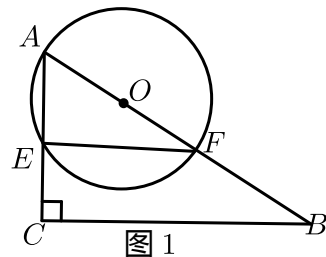
$$\therefore AC = 2AM = \frac{8}{3} \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】切线的判定定理

过关斩将

5. 如图, $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, O 为 AB 上一点, $\odot O$ 经过点 A , 与 AC 交于点 E , 与 AB 交于点 F , 连接 EF .

(1) 如图1, 若 $\angle B = 30^\circ$, $AE = 2$. 求 AF 的长.



(2) 如图2, DA 平分 $\angle CAB$, 交 CB 于点 D , $\odot O$ 经过点 D ,

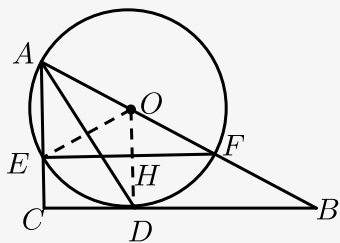


图 2

$$\begin{aligned}
 &\because EF \parallel BC, \angle ODB = \angle ACB = 90^\circ, \\
 &\therefore \text{四边形 } ECDH \text{ 是矩形, } EH = FH, \\
 &\therefore EH = CD = 2, \\
 &OH = \frac{1}{2}AE = \frac{3}{2}, \\
 &\therefore OE = \sqrt{OH^2 + HE^2} = \frac{5}{2}, \\
 &\therefore AF = 2OE = 5.
 \end{aligned}$$

【标注】【思想】转化与化归思想

【知识点】30°特殊角的性质应用

【知识点】角分线性性质定理

【知识点】解直角三角形的综合应用

【知识点】勾股定理

【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】矩形的性质

【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】切线的判定定理

【知识点】切线的性质定理

【知识点】平行线判定

【知识点】平行线判定与性质的综合

【知识点】平行线的性质

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

典题精练3

6. 已知点A, B在半径为1的 $\odot O$ 上, 直线AC与 $\odot O$ 相切, $OC \perp OB$, 连接AB交OC于点D.

(1) 如图①, 若 $\angle OCA = 60^\circ$, 求OD的长.

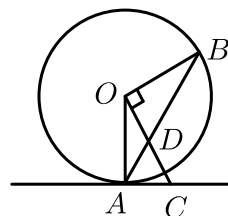


图 ①

(2) 如图②, OC 与 $\odot O$ 交于点 E , 若 $BE \parallel OA$, 求 OD 的长.

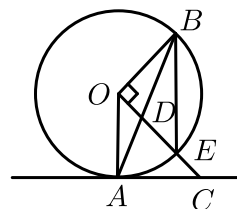


图 ②

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\sqrt{2} - 1$.

【解析】 (1) $\because AC$ 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ.$$

$$\because \angle OCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 30^\circ.$$

$$\because OC \perp OB,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 120^\circ.$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ.$$

$$\therefore OD = AD, \angle DAC = 60^\circ.$$

$$\therefore AD = CD = AC.$$

$$\because OA = 1,$$

$$\therefore OD = AC = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) $\because OC \perp OB,$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB = 45^\circ.$$

$$\because BE \parallel OA,$$

$$\therefore \angle AOC = 45^\circ, \angle ABE = \angle OAB.$$

$$\because OA = AC, \angle OAB = \angle OBA = 22.5^\circ.$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AOC + \angle OAB = 67.5^\circ.$$

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - \angle OAB = 67.5^\circ = \angle ADC,$$

$$\therefore AC = CD .$$

$$\therefore OD = OC - CD = \sqrt{2} - 1 .$$

【标注】【能力】分析和解决问题能力

【知识点】切线的性质定理

【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

【知识点】三角形的外角定义及性质

【知识点】30°特殊角的性质应用

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交边 BC , AC 于点 D , 点 E , 且 $AE = BE$.

(1) 如图①, 求 $\angle EBC$ 的度数.

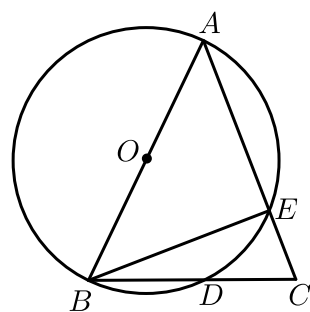


图 ①

(2) 如图②, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 Q , 交 AC 于点 F , 若 $\odot O$ 的直径为10, 求 BG 的长.

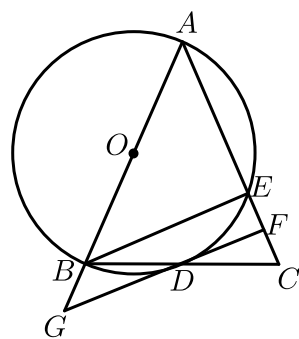


图 ②

【答案】(1) $\angle EBC = 22.5^\circ$.

(2) $BG = 5\sqrt{2} - 5$.

【解析】(1) $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ ,$$

$$\because AE = BE ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABE = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ.$$

(2) 连接 OD , AD ,

$\therefore FG$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore GF \perp OD$,

$\therefore \angle ODG = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore AD \perp BC$,

又 $\therefore AB = AC$,

$\therefore BD = DC$,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\therefore \angle GOD = \angle BAC = 45^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ODG$ 中,

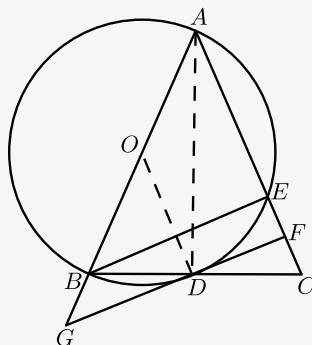
$$\cos \angle GOD = \frac{OD}{OG} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \odot O$ 的直径为 10,

$\therefore OB = OD = 5$,

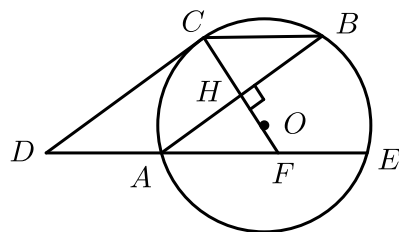
$\therefore OG = 5\sqrt{2}$,

$\therefore BG = 5\sqrt{2} - 5$.



【标注】【知识点】圆与三角函数

8. 已知：如图， $\odot O$ 的半径 OC 垂直弦 AB 于点 H ，连接 BC ，过点 A 作弦 $AE \parallel BC$ ，过点 C 作 $CD \parallel BA$ 交 EA 延长线于点 D ，延长 CO 交 AE 于点 F 。



(1) 求证： CD 为 $\odot O$ 的切线。

(2) 若 $BC = 5$, $AB = 8$, 求 OF 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) OF = \frac{11}{6}.$$

【解析】(1) $\because OC \perp AB$, $CD \parallel BA$,

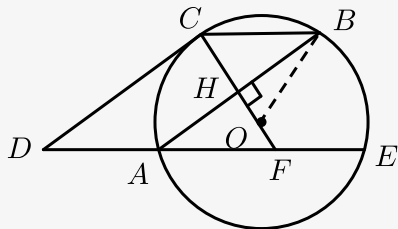
$$\therefore \angle DCF = \angle AHF = 90^\circ,$$

又 $\because$ 点 C 在 $\odot O$ 上, OC 为半径,

$\therefore CD$ 为 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because OC \perp AB$, $AB = 8$,

$\therefore$



$$AH = BH = \frac{1}{2}AB = 4.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 3.$$

$\because AE \parallel BC$,

$$\therefore \angle B = \angle HAF.$$

$$\because \angle BHC = \angle AHF, BH = AH,$$

$$\therefore \triangle HAF \cong \triangle HBC,$$

$$\therefore FH = CH = 3, CF = 6.$$

连接 BO , 设 $BO = x$, 则 $OC = x$, $OH = x - 3$.

在 $\text{Rt}\triangle BHO$ 中, 由勾股定理得, $4^2 + (x - 3)^2 = x^2$,

$$\text{解得 } x = \frac{25}{6},$$

$$\therefore OF = CF - OC = \frac{11}{6}.$$

【标注】【知识点】圆与全等

过关斩将

9. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 P 在 BA 的延长线上, PD 切 $\odot O$ 于点 D , 过点 B 作 $BE \perp PD$, 交 PD 的延长线于点 C , 连接 AD 并延长, 交 BE 于点 E .

$$\begin{aligned}
 \therefore DC &= \sqrt{3}, \\
 \therefore DC^2 + OD^2 &= OC^2, \\
 \therefore OC^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7, \\
 \therefore OC &= \sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

10. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径， $OC \perp AB$ ，弦 DC 与 OB 交于点 F ，在直线 AB 上有一点 E ，连接 ED ，且有 $ED = EF$ 。

(1) 如图1，求证 ED 为 $\odot O$ 的切线。

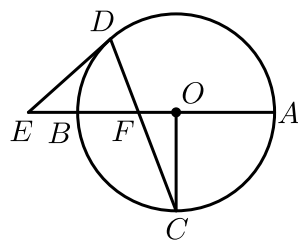


图 1

(2) 如图2，直线 ED 与切线 AG 相交于 G ，且 $OF = 1$ ， $\odot O$ 的半径为3，求 AG 的长。

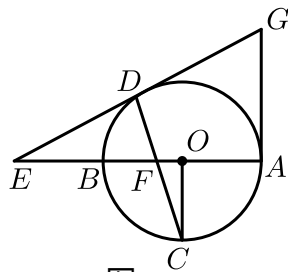


图 2

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 6。

【解析】(1) 连接 OD ，如图1所示。

$$\begin{aligned}
 \because ED &= EF, \\
 \therefore \angle EDF &= \angle EFD, \\
 \because \angle EFD &= \angle CFO, \\
 \therefore \angle EDF &= \angle CFO. \\
 \because OD &= OC, \\
 \therefore \angle ODF &= \angle OCF. \\
 \because OC &\perp AB, \\
 \therefore
 \end{aligned}$$

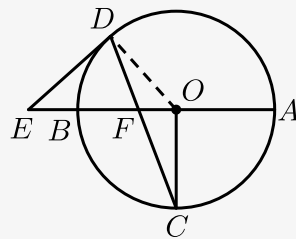


图 1

$$\angle CFO + \angle OCF = \angle EDF + \angle ODF = \angle EDO = 90^\circ,$$

$\therefore ED$ 为 $\odot O$ 的切线 .

(2) 连接 OD , OG , 如图2所示 .

由 (1) 可知 $\triangle EDO$ 为直角三角形 , $OF = 1$,

设 $ED = EF = a$, $EO = EF + FO = a + 1$,

由勾股定理得 : $EO^2 = ED^2 + DO^2$,

即 $(a + 1)^2 = a^2 + 3^2$,

解得 : $a = 4$,

即 $ED = 4$, $EO = 5$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 3 ,

$\therefore EA = 8$,

$\therefore$ 直线 ED 与切线 AG 相交于 G , 由 (1) 可知 ED 为 $\odot O$ 的切线 ,

$\therefore \triangle GDO \cong \triangle GAO$ (HL)

$\therefore DG = AG$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle GEA$ 中 , $EG^2 = EA^2 + AG^2$,

$\therefore (4 + AG)^2 = 8^2 + AG^2$,

$\therefore AG = 6$.

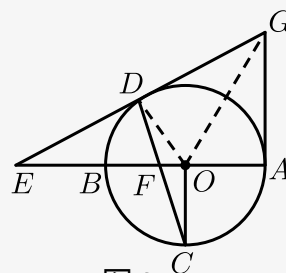
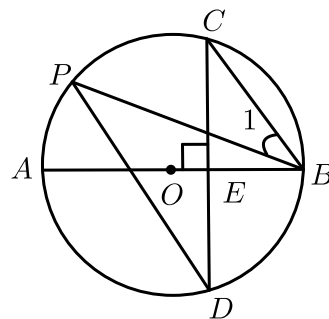


图 2

【标注】【知识点】圆与勾股

二、圆与三角函数

11. 如图 , AB 是 $\odot O$ 的直径 , 弦 $CD \perp AB$ 于点 E , 点 P 在 $\odot O$ 上 , $\angle 1 = \angle C$.



(1) 求证 : $CB \parallel PD$.

(2) 若 $BC = 6$, $\sin \angle P = \frac{2}{5}$, 求 AB 的值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 15

【解析】(1) $\because \angle 1 = \angle C, \angle C = \angle P,$

$$\therefore \angle 1 = \angle P.$$

$$\therefore CB \parallel PD.$$

(2) 连接 AC ,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$\because CD \perp AB,$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD}.$$

$$\therefore \angle P = \angle CAB.$$

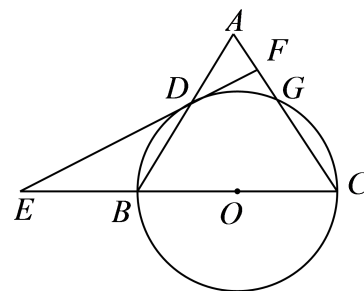
$$\therefore \sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{5}.$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore AB = 15.$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

12. 如图, 等腰三角形 ABC 中, $AC = BC = 10, AB = 12$, 以 BC 为直径做 $\odot O$ 交 AB 于点 D , 交 AC 于点 G , $DF \perp AC$, 垂足为点 F , 交 CB 的延长线于点 E .



(1) 求证: 直线 EF 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 求 $\cos E$ 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \cos \angle E = \frac{24}{25}.$$

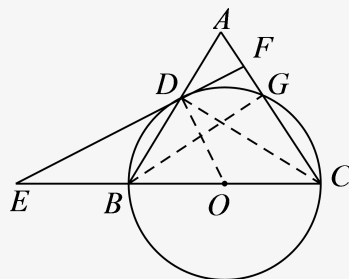
【解析】(1) 如图所示, 连接 OD, CD ,

$\because BC$ 是直径,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ, \text{ 即 } CD \perp AB.$$

又 $AC = BC$,

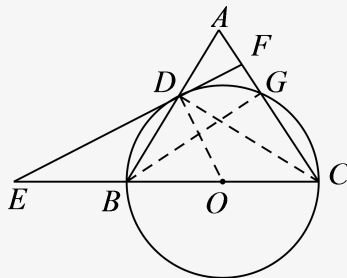
$\therefore D$ 为 AB 中点,



$\because O$ 为 BC 的中点，
 $\therefore OD$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，
 则 $OD \parallel AC$ ，
 $\therefore \angle ODE = \angle CFE = 90^\circ$ ，
 即 $OD \perp EF$ ，且 OD 为 $\odot O$ 半径，
 $\therefore OD$ 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 如图所示，连接 OD ， CD ， BG ，

$\because BC$ 是直径，
 $\therefore \angle BGC = 90^\circ$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，



$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\because AB \cdot CD = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BG,$$

$$\therefore BG = \frac{AB \cdot CD}{AC} = \frac{12 \times 8}{10} = \frac{48}{5},$$

$$\because BG \perp AC, DF \perp AC \text{ 即 } \angle BGC = \angle EFC = 90^\circ,$$

$$\therefore BG \parallel EF,$$

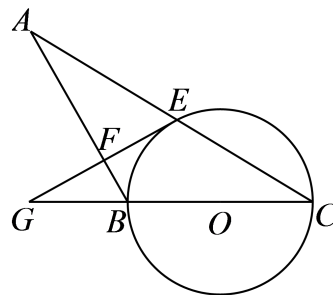
$$\therefore \angle E = \angle CBG,$$

$$\therefore \cos \angle E = \cos \angle CBG = \frac{BG}{BC} = \frac{24}{25}.$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

过关斩将

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 E ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，延长 EF 交 CB 的延长线于点 G ，且 $\angle ABG = 2\angle C$ 。



(1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 若 $\sin \angle EGC = \frac{3}{5}$ ， $\odot O$ 的半径是3，求 AF 的长。

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \frac{24}{5}.$$

【解析】(1)如图,连接 EO ,则 $OE = OC$,

$$\therefore \angle EOG = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle ABG = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle EOG = \angle ABG,$$

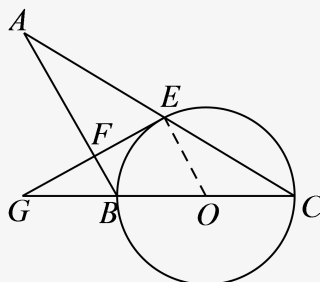
$$\therefore AB \parallel EO,$$

$\therefore EF \perp AB,$

$$\therefore EF \perp OE,$$

又 $\because OE$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.



(2) $\because \angle ABG = 2\angle C$, $\angle ABG = \angle C + \angle A$,

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

$$\therefore BA = BC = 6,$$

在Rt△OEG中, $\therefore \sin \angle EGO = \frac{OE}{OG}$,

$$\therefore OG = \frac{OE}{\sin \angle EGO} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$BG = OG - OB = 2,$$

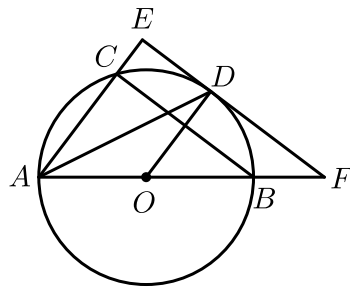
在Rt△FGB中, $\therefore \sin \angle EGO = \frac{BF}{BG}$,

$$\therefore BF = BG \sin \angle EGO = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\text{则 } AF = AB - BF = 6 - \frac{6}{5} = \frac{24}{5}.$$

【标注】 **【知识点】** 弧、弦、圆心角关系

14. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为直径, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 与点 D , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 分别交 AC 、 AB 于点 E 、 F .



(1) 求证: $EF \parallel BC$.

(2) 若 $BF = 2$, $\sin F = \frac{3}{5}$, 求 AD 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$.

【解析】 (1) $\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$$\therefore \angle CAD = \angle DAB ,$$

$$\because OA = OD ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADO ,$$

$$\therefore AE // OD ,$$

$$\because AB \text{ 是直径 } ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\because EF \text{ 是 } \odot O \text{ 切线 } ,$$

$$\therefore OD \perp EF , \text{ 且 } AE // OD ,$$

$$\therefore AE \perp EF , \text{ 且 } \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore EF // BC .$$

$$(2) \because \sin F = \frac{3}{5} = \frac{OD}{OF} , \text{ 且 } BF = 2 ,$$

$$\therefore \frac{OD}{OB + BF} = \frac{3}{5} ,$$

$$\therefore OD = OB = 3 ,$$

$$\therefore AB = 6 , AF = AB + BF = 8 ,$$

$$\because \sin F = \frac{3}{5} = \frac{AE}{AF} ,$$

$$\therefore AE = \frac{24}{5} ,$$

$$\because OF = OB + BF = 5 , OD = 3 ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{OF^2 - OD^2} = 4 ,$$

$$\because OD // AE ,$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{OF}{AO} ,$$

$$\therefore \frac{4}{DE} = \frac{5}{3} ,$$

$$\therefore DE = \frac{12}{5} ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \frac{12}{5}\sqrt{5} .$$

【标注】【知识点】角分线性质定理

【知识点】圆与勾股

【知识点】圆与三角函数

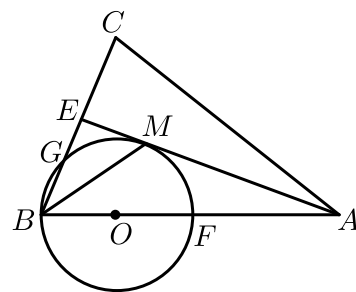
【知识点】切线的性质定理

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

三、圆与相似

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AE 是 $\angle BAC$ 的平分线， $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 AE 于点 M ，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心， OB 的长为半径的圆经过点 M ，交 BC 于点 G ，交 AB 于点 F 。

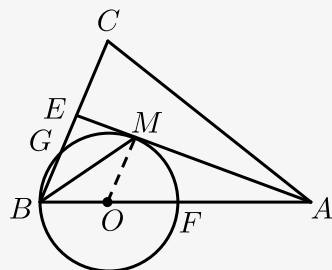


- (1) 求证： AE 为 $\odot O$ 的切线。
(2) 当 $BC = 8$ ， $AC = 12$ 时，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 3。

【解析】(1) 连接 OM 。



$\because AC = AB$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ，
 $\therefore AE \perp BC$ ， $CE = BE = \frac{1}{2}BC = 4$ ，
 $\because OB = OM$ ，
 $\therefore \angle OBM = \angle OMB$ ，
 $\because BM$ 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore \angle OBM = \angle CBM$ ，

$$\therefore \angle OMB = \angle CBM,$$

$$\therefore OM \parallel BC,$$

$$\text{又} \because AE \perp BC,$$

$$\therefore AE \perp OM,$$

$$\therefore AE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 R ,

$$\therefore OM \parallel BE,$$

$$\therefore \triangle OMA \sim \triangle BEA,$$

$$\therefore \frac{OM}{BE} = \frac{AO}{AB} \text{ 即 } \frac{R}{4} = \frac{12-R}{12},$$

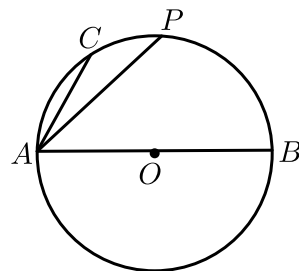
$$\text{解得 } R = 3,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 3.$$

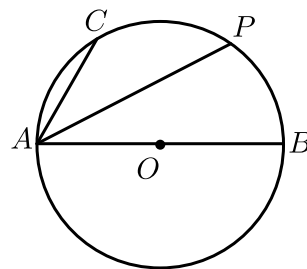
【标注】【知识点】圆与相似

16. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 、 P 是 $\widehat{AB}$ 上两点, $AB = 13$, $AC = 5$.

(1) 如图, 若点 P 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 PA 的长.



(2) 如图, 若点 P 是 $\widehat{BC}$ 的中点, 求 PA 的长.



【答案】 (1) $PA = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$

(2) $PA = 3\sqrt{13}.$

【解析】 (1) 如图, 连接 PB ,

$\because P$ 为 $\widehat{AB}$ 的中点,

$$\therefore AP = PB.$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

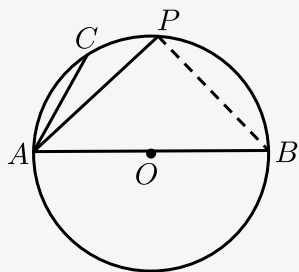
$\therefore \triangle PAB$ 为等腰直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中,

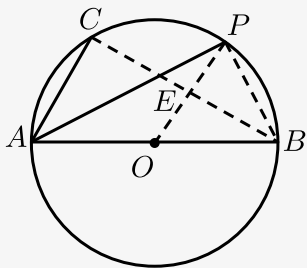
根据勾股定理, 可得 $AP^2 + PB^2 = AB^2$,

$$2AP^2 = 13^2,$$

$$\therefore PA = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$$



(2) 方法一: 如图所示, 连接 CB 、 PO 交于点 E , 连接 PB .



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 、 $\triangle APB$ 是直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

$\because$ 点 P 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP$$

$$\therefore \angle BOP = 2\angle BAP,$$

$$\therefore \angle BOP = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAC.$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BOE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BA} = \frac{1}{2},$$

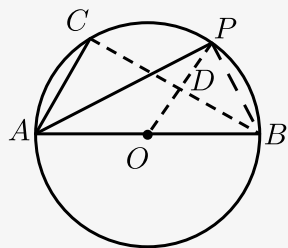
$$\therefore BE = 6, OE = \frac{5}{2}, \angle BEO = \angle BCA = 90^\circ$$

$$\therefore PE = OP - OE = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle PEB$ 中, $PB = \sqrt{PE^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$,

在 $\text{Rt}\triangle APB$ 中, $PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = 3\sqrt{13}$.

方法二: 如图, 连接 PB , BC , 连接 OP 交 BC 于点 D .



$\because P$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$\therefore OP \perp BC$, $BD = CD$.

$\because OA = OB$,

$\therefore OD = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

$\because OP = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2}$,

$\therefore PD = OP - OD = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

$\because AB = 13$, $AC = 5$,

$\therefore BC = 12$,

$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 6$,

$\therefore PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = 2\sqrt{13}$.

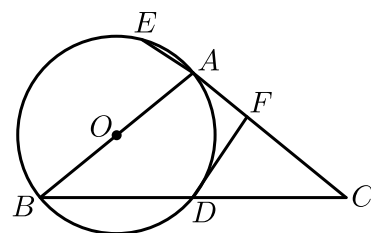
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle APB = 90^\circ$,

$\therefore PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = 3\sqrt{13}$.

【标注】【知识点】圆与相似

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 BC 相交于点 D , 与 CA 的延长线相交于点 E , $\odot O$ 的切线 DF 交 EC 于点 F .



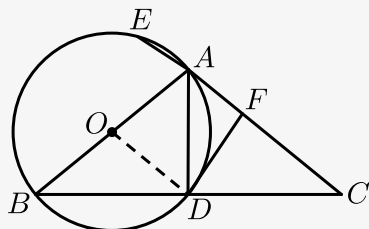
(1) 求 $\angle DFC$ 的度数.

(2) 若 $AC = 3AE$, $BC = 12$, 求 $\odot O$ 的直径 AB .

【答案】 (1) 90° .

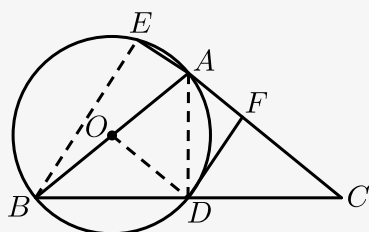
(2) $3\sqrt{6}$.

【解析】 (1) 连接 OD ,



$\because AB = AC$,
 $\therefore \angle ABC = \angle C$,
 $\because OB = OD$,
 $\therefore \angle OBD = \angle ODB$,
 $\because DF$ 为 $\odot O$ 切线 ,
 $\therefore OD \perp DF$,
 $\therefore \angle ODF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ODB + \angle FDC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OBD + \angle FDC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle C + \angle FDC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DFC = 180^\circ - (\angle C + \angle FDC) = 90^\circ$.

(2) 连接 AD , BE ,



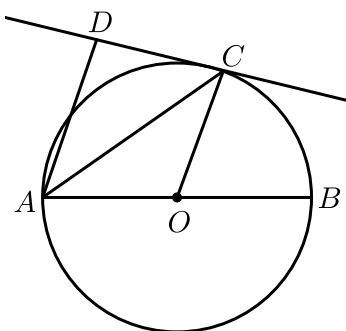
$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径 ,
 $\therefore \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$,
 又 $\because AB = AC$, $BC = 12$,
 $\therefore BD = CD = 6$,
 $\because AC = 3AE$, $AC + AE = EC$,
 $\therefore CE = \frac{4}{3}AC$,
 $\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ$, $\angle ACD = \angle ECB$,

$$\begin{aligned}
 &\therefore \triangle ADC \sim \triangle BEC, \\
 &\therefore \frac{CD}{EC} = \frac{AC}{BC}, \\
 &\frac{\frac{4}{3}AC}{6} = \frac{AC}{12}, \\
 &AC = 3\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

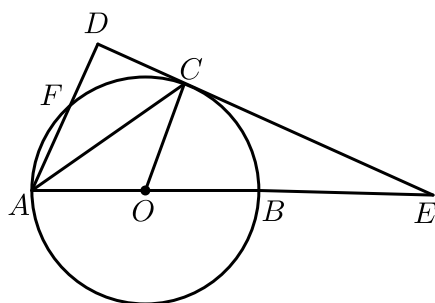
【标注】【知识点】圆与相似

过关斩将

18. 已知 A, B, C 是 $\odot O$ 上的三个点, CD 切 $\odot O$ 于点 C , AC 平分 $\angle DAB$.



图①



图②

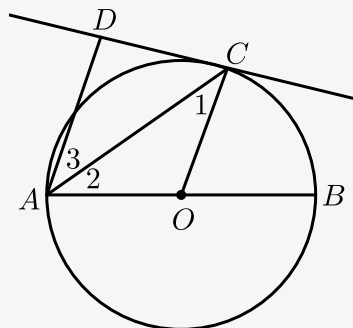
(1) 如图①, 求 $\angle ADC$ 的大小.

(2) 如图②, 延长 DC , 与 AB 的延长线交于点 E , AD 交 $\odot O$ 于点 F , 若 $AD = 4$, $AE = 12$, 求 $\odot O$ 的半径及 AF 的长.

【答案】(1) $\angle ADC = 90^\circ$

(2) $\odot O$ 的半径及 AF 的长分别为3和2

【解析】(1) 如图①,



图①

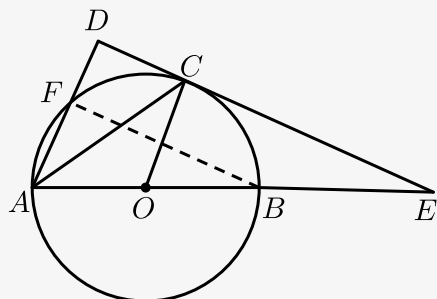
$\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$,
 $\therefore OC \parallel AD$,
 $\therefore CD$ 切 $\odot O$ 于点 C ,
 $\therefore OC \perp CD$,
 $\therefore AD \perp CD$,
 $\therefore \angle ADC = 90^\circ$.

(2) 连接 BF , 如图② , 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OE = AE - OA = 12 - r$,



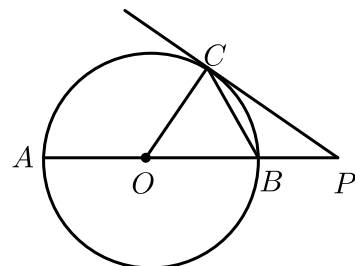
图②

$\therefore OC \parallel AD$,
 $\therefore \triangle EOC \sim \triangle EAD$,
 $\therefore \frac{OC}{AD} = \frac{OE}{AE}$, 即 $\frac{r}{4} = \frac{12-r}{12}$, 解得 $r = 3$,
 $\therefore AB$ 为直径 ,
 $\therefore \angle AFB = 90^\circ$,
 $\therefore BF \parallel DE$,
 $\therefore \triangle ABF \sim \triangle AED$,
 $\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AB}{AE}$, 即 $\frac{AF}{4} = \frac{6}{12}$, 解得 $AF = 2$,
 即 $\odot O$ 的半径及 AF 的长分别为 3 和 2 .

【标注】【知识点】圆与相似

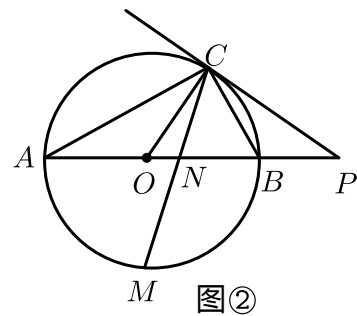
19. 已知 , AB 是 $\odot O$ 的直径 , 点 C 在 $\odot O$ 上 , 过点 C 的直线与 AB 的延长线交于点 P .

(1) 如图① , 若 $\angle COB = 2\angle PCB$, 求证 : 直线 PC 是 $\odot O$ 的切线 .



图①

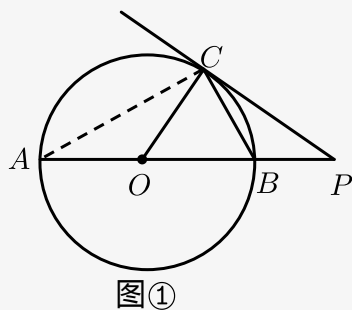
(2) 如图②, 若点 M 是 $\widehat{AB}$ 的中点, CM 交 AB 于点 N , $MN \cdot MC = 36$, 求 BM 的值.



【答案】 (1) 证明见解析.

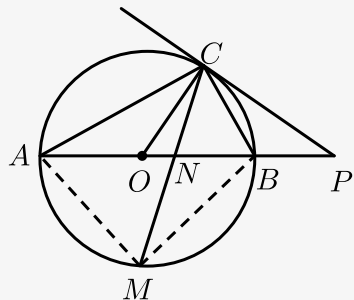
(2) 6.

【解析】 (1) 如图, 连接 AC ,



$\because OA = OC$,
 $\therefore \angle A = \angle ACO$,
 $\therefore \angle COB = 2\angle A = 2\angle ACO$.
 又 $\because \angle COB = 2\angle PCB$,
 $\therefore \angle ACO = \angle PCB$.
 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ$.
 $\therefore \angle PCB + \angle OCB = 90^\circ$, 即 $OC \perp CP$.
 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,
 $\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 连接 MA 、 MB , (如图)



图②

$\because$ 点 M 是弧 AB 的中点 ,
 $\therefore \widehat{AM} = \widehat{BM}$,
 $\therefore \angle ACM = \angle BAM$,
 $\because \angle AMC = \angle AMN$,
 $\therefore \triangle AMC \sim \triangle NMA$,
 $\therefore \frac{AM}{NM} = \frac{CM}{AM}$,
 $\therefore AM^2 = MC \cdot MN$,
 $\because MC \cdot MN = 36$,
 $\therefore AM = 6$,
 $\therefore BM = AM = 6$.

【标注】【知识点】圆与相似

20. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, D 是 $\widehat{BC}$ 上一点 , $OD \perp BC$, 垂足为 H , 连接 AD 、 CD , AD 与 BC 交于点 P .

(1) 如图1 , 求证 : $\angle ACD = \angle APB$.

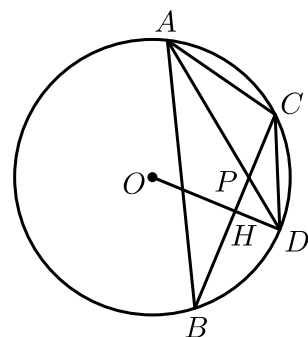


图 1

(2) 如图2 , 若 AB 过圆心 , $\angle ABC = 30^\circ$, $\odot O$ 的半径长为 3 , 求 AP 的长 .

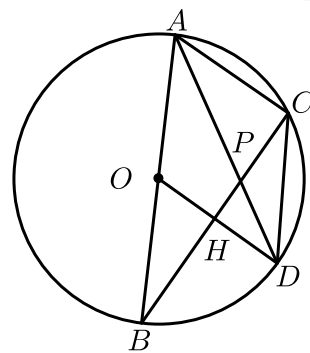


图 2

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $AP = 2\sqrt{3}$.

【解析】(1) 如图a $\because OD \perp BC$, OD 过圆心 .

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD} ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC .$$

$$\because \angle B = \angle ADC ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle APB .$$

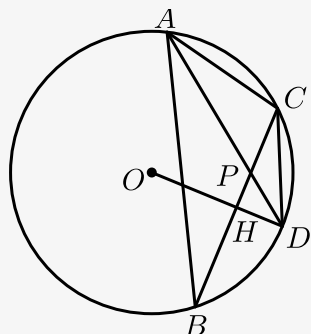


图 a

(2) 如图b $\because AB$ 过圆心 ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ .$$

$$\because \angle ABC = 30^\circ , \odot O \text{的半径长为} 3 ,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ , AB = 6 , AC = 3 ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \angle ADC = 30^\circ ,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{3} .$$

$$\because \angle B = \angle ADC , \angle BAD = \angle CAD ,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ADC ,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC} , \text{即} \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{AP}{3} ,$$

$$\therefore AP = 2\sqrt{3} .$$

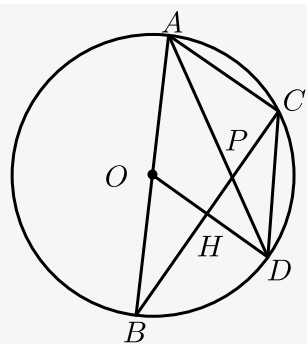


图 b

【标注】【知识点】圆与相似